Newton és Halley

Gyökkeresési módszerek összehasonlítása

$$f(x) = e^x - 1$$

Ugyanaz a kezdőérték. Eltérő konvergencia.

A feladat

Keressük az f(x) = 0 egyenlet gyökét.

Függvény	$f(x) = e^x - 1$
Kezdőérték	$x_0 = -3$
Pontosság	$\lvert x_n - 0 \rvert < 10^{-6}$

A pontos gyök: $x^* = 0$

Newton-módszer

A függvény első deriváltját használja.

$$f'(x) = e^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 1}{e^{x_n}}$$

Első lépés:

$x_1 \approx 16{,}085537$

A módszer először messze eltávolodik a gyöktől.

Halley-módszer

Az első és a második deriváltat is használja.

$$f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(e^{x_n} - 1)}{e^{x_n} + 1}$$

Első lépés:

$x_1 \approx -1{,}189703$

Már az első lépés a gyök irányába halad.

Iterációk összehasonlítása

A közelítések néhány kiemelt lépésben.

Iteráció	Newton	Halley
0	−3,000000	−3,000000
1	16,085537	−1,189703
2	15,085537	−0,122951
3	14,085537	−0,000155
4	13,085538	≈ 0
10	7,086024	—
20	0,000031	—
21	≈ 0	—

Miért ilyen nagy az eltérés?

Newton

$x_0 = -3 \rightarrow x_1 \approx 16{,}09$

A nagy pozitív tartományban az iterációk eleinte közel 1-gyel csökkentik x értékét.

Halley

$x_0 = -3 \rightarrow -1{,}19 \rightarrow -0{,}123 \rightarrow -0{,}000155 \rightarrow 0$

Eredmény

Azonos kezdőérték és azonos hibahatár mellett.

NEWTON

21 lépés

HALLEY

4 lépés

5,25× kevesebb iteráció

Megjegyzés: kevesebb iteráció nem feltétlenül jelent arányosan rövidebb futási időt.